# BAB 8BIDANG

**Himmawati Puji Lestari**
**himmawati@uny.ac.id**

# SUB BAB

1. • PERSAMAAN NORMAL BIDANG
2. • PERSAMAAN BENTUK UMUM BIDANG
3. • DUA BIDANG
4. • PERSAMAAN BENTUK INTERSEP
5. • BIDANG MELALUI TIGA TITIK
6. • SISTEM BIDANG
7. • PEMBAGIAN RUANG OLEH BIDANG
8. • JARAK TITIK KE BIDANG
9. • BIDANG-BAGI SUDUT ANTARA DUA BIDANG
10. • PROYEKSI ORTOGONAL PADA BIDANG
11. • VOLUME TERAHEDRON/BIDANG EMPAT

# 1. PERSAMAAN NORMAL BIDANG

Persamaan normal bidang dengan panjang normal p dan cosinus arah [$l$, $m$, $n$] dengan p positif dan

$$l = \cos\alpha$$

$$m = \cos\beta$$

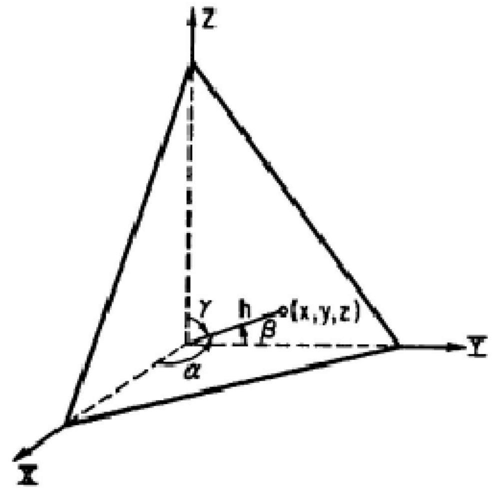
$$n = \cos\gamma$$

di mana [$\alpha$, $\beta$, $\gamma$] merupakan sudut arah dari normalnya adalah

$$lx + my + nz = p$$

atau

$$\cos\alpha\, x + \cos\beta\, y + \cos\gamma\, z = p.$$



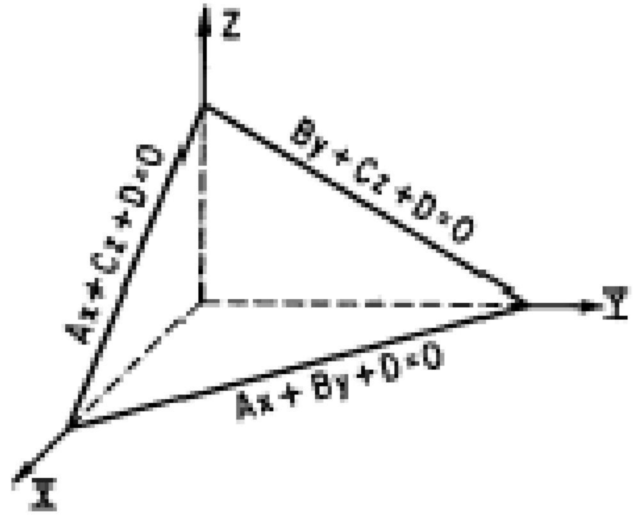

Persamaan bidang merupakan persamaan berderajad satu dalam x, y, dan z.

# 2. PERSAMAAN BENTUK UMUM BIDANG

Setiap persamaan berderajad satu dalam x, y, dan z menyatakan suatu bidang. Persamaan umum berderajad satu dalam x, y, z

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

di mana A, B, C tidak semuanya nol merupakan persamaan bidang.



# Hubungan antara persamaan bentuk umum dan persamaan normal

Hal yang harus diingat adalah p selalu positif, sehingga pemilihan tanda dari D menyesuaikan sehingga p bernilai positif. Hubungan antara persamaan Ax+By+Cz+D=0 dengan persamaan normal *l*x + *m*y + *n*y = p jika D positif adalah

$$l = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$m = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad p = +\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$n = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Jika D bernilai negatif, maka cukup diubah tanda dari persamaan l, m, n, dan p di atas.

## Kondisi penentu bidang

Persamaan umum bidang $Ax+By+Cz+D=0$ memuat sebarang 3 konstan (rasio dari A, B, C, D), sehingga bidang dapat ditentukan jika diketahui 3 kondisi/syarat yang menimbulkan satu hubungan antar konstanta. Ketiga konstanta dapat ditentukan dari ketiga relasi yang dihasilkan, misalnya :

A. Melalui tiga titik yang tidak segaris (non-kolinear)
B. Melalui dua titik dan tegak lurus suatu bidang
C. Melalui suatu titik dan tegak lurus dua bidang

# Cosinus arah dari normal bidang

Cosinus arah dari normal sebarang bidang sebanding dengan koeffisien dari x, y, z pada persamaannya atau dengan kata lain bilangan arah dari normal bidang adalah koeffisien dari x, y, z dalam persamaannya. Dengan demikian, A, B, C adalah bilangan arah dari normal bidang $Ax+By+Cz+D=0$.

# Jejak dan Intersep.

Titik-titik pada bidang $Ax + By + Cz + D = 0$ dengan $z = 0$ semua terletak pada bidang-XY. Garis yang melalui titik-titik $Ax + By + D = 0$ disebut jejak bidang (**trace of the plane**). Jejak bidang pada bidang-XZ dan pada bidang-YZ adalah titik-titik di mana dipernuhi $y = 0$ dan $x = 0$berturut-turut, yaitu

$$Ax+Cz+D=0 \quad \text{dan} \quad By+Cz+D=0.$$

Titik-titik pada bidang yang terletak pada sumbu koordinat adalah $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$. Titik-titik ini merupakan titik potong bidang, dan tentu saja titik potong dari jejak. Untuk menggambarkan bidang, sebaiknya digambarkan juga intersep dan jejak bidang.

# 3. DUA BIDANG

**Relasi 2 bidang :**

-Berimpit

-Berpotongan

-Sejajar

**Sudut antara 2 bidang.**

Dua bidang yang berpotongan dapat ditentukan sudut yang dibentuknya. Sudut antara dua bidang, $\theta$ adalah sudut yang dibentuk oleh kedua normal bidang $A_1x+B_1y+C_1y+D_1=0$ dan $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$

adalah

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right)$$

**Kesejajaran dan ketegaklurusan dua bidang**

Dua bidang akan sejajar atau tegak lurus bergantung pada normal mereka sejajar atau tegak lurus.

Dua bidang

$$A_1x+B_1y+C_1y+D_1=0 \quad \text{dan} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$$

akan sejajar (**parallel)**, jika

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

dan akan tegak lurus (**perpendicular)** jika

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

# 4. PERSAMAAN BENTUK INTERSEP BIDANG

Persamaan bidang Ax+By+Cz+D=0 jika dinyatakan dalam suku-suku perpotongan a, b, c di mana bidang akan memotong sumbu-sumbu koordinat di titik (a,0,0), (0,b,0), dan (0,0,c) adalah

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

# 5. BIDANG MELALUI 3 TITIK

Akan ditentukan persamaan bidang yang melalui tiga titik yang tidak segaris, yaitu $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$. Misalkan persamaan bidang yang dicari

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{(i)}$$

Karena ketiga titik terletak pada bidang, maka diperoleh tiga persamaan

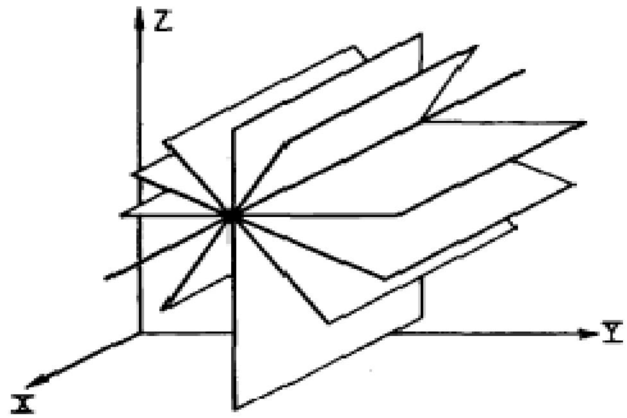
$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad \text{(ii)}$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \qquad \text{(iii)}$$
$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \qquad \text{(iv)}$$

Dengan mengeliminasi A, B, C, D dari (i)-(iv), diperoleh

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

# 6. SISTEM/KELUARGA BIDANG.

Persamaan sebuah bidang yang memenuhi dua kondisi akan memuat sebuah konstanta sebarang yang dapat dipilih dari sebanyak takhingga bilangan. Dengan demikian akan membentuk sebuah sistem bidang atau keluarga bidang. Sebuah konstanta sebarang akan menentukan sebuah bidang anggota keluarga bidang. Konstanta ini dinamakan paameter. Sebaliknya, persamaan sebuah bidang yang memenuhi satu kondisi akan memuat dua parameter.



# 7. PEMBAGIAN OLEH BIDANG

Oleh bidang, ruang terbagi menjadi dua bagian yang masing-masing merupakan setengah ruang.

**Theorema.** Dua titik $A(x_1, y_1, z_1)$ dan $B(x_2, y_2, z_2)$ terletak pada setengah ruang yang sama atau berbeda terhadap bidang $Ax+By+Cz+D=0$ bergantung pada

$Ax_1+By_1+Cz_1+D$ dan $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ bertanda sama atau berbeda.

# 8. PANJANG RUAS GARIS DARI SUATU TITIK TEGAK LURUS BIDANG

Jarak titik ke bidang adalah panjang ruas garis penghubung titik ke bidang yang tegak lurus bidang

Jarak titik $P(x_1, y_1, z_1)$ ke bidang $Ax+By+Cz+D=0$ adalah

$$\pm \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

# 9. BIDANG PEMBAGI SUDUT ANTARA DUA BIDANG

Jika (x,y,z) sebarang titik pada salah satu bidang yang membagi dua sama besar sudut antara bidang Ax+By+Cz+D=0 dan $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, maka panjang ruas garis dari titik ini tegak lurus ke kedua bidang haruslah sama.

Dengan demikian, persamaan bidang pembagi sudut yang dibentuk oleh dua bidang adalah

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}}$$

## 10. PROYEKSI ORTHOGONAL PADA SEBUAH BIDANG

Titik kaki ruas garis yang ditarik dari sebarang titik P pada bidang $\pi$ dinamakan proyeksi orthogonal (**orthogonal projection)** titik P pada bidang $\pi$. Bidang $\pi$ ini dinamakan bidang proyeksi (**plane of the projection)**.

**Theorema**. Jika $A_x$, $A_y$, $A_z$ menyatakan luas daerah proyeksi dari sebuah luasan yang luasnya $A$ pada bidang koordinat, maka dipenuhi

$$A^2 = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2$$

# 11. VOLUME BIDANG EMPAT/TETRAHEDRON

Volume bidang empat yang keempat titik sudutnya $(x_1,y_1,z_1)$, $(x_2,y_2,z_2)$, $(x_3,y_3,z_3)$, dan $(x_4,y_4,z_4)$ adalah

$$V - \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$